SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1999-2000

Angelo Cavallucci

RILASSAMENTO PER UNA CLASSE DI SISTEMI DI CONTROLLO VINCOLATI

27 giugno 2000

Tecnoprint - Bologna 2000

Riassunto. Vengono esposti alcuni risultati recenti di rilassamento per certi sistemi di controllo con vincoli di stato e controllo.

Abstract . We present some recent relaxation results for some control systems under state and control constraints .

RILASSAMENTO PER UNA CLASSE DI SISTEMI DI CONTROLLO VINCOLATI

ANGELO CAVALLUCCI

Consideriamo il sistema

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ q.d. su } [0,T], \\ u(t) \in U \text{ q.d. su } [0,T], \\ x(0) = x_0, \\ h_i(t, x(t), u(t)) \leq 0 \text{ q.d. su } [0,T], \text{ per } 1 \leq i \leq m, \\ g_i(t, x(t), u(t)) = 0 \text{ q.d. su } [0,T], \text{ per } 1 \leq i \leq p \end{cases}$$

con $0 < T < \infty$, $x(.) : [0,T] \longrightarrow R^n$ assolutamente continua, $u(.) : [0,T] \longrightarrow U$ misurabile secondo Lebesgue, U sottoinsieme chiuso dello spazio di Banach separabile Z.

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di rilassamento per il sistema (1) dovuti a [3] e [10].

Il metodo seguito in [10] consiste nella trasformazione del sistema (1), sotto opportune ipotesi, in un equivalente problema di Cauchy per una inclusione differenziale e poi applicare il classico teorema di rilassamento di Filippov-Wazewski (cfr. [1], [5]).

Per $v \in R^n$ poniamo per definizione

$$v \leq 0 \Longleftrightarrow v_i \leq 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n$$

$$v < 0 \Longleftrightarrow v_i < 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n$$

Se $(X, \| \cdot \|)$ e' uno spazio normato e $x_0 \in X$, $r \geq 0$, $A \subset X$, poniamo

$$B_r(x_0) = \{x \in X | \; \| x - x_0 \| \leq r\}$$

$$B = B_1(0)$$

$$d(x_0, A) = \inf_{y \in A} \| x - y \|, \quad d(x_0, \emptyset) = +\infty$$

$$\overline{co}A = \textit{involucro convesso chiuso di } A.$$

Facciamo le seguenti ipotesi sui dati del sistema (1)

$$[0,T] \times R^n \times Z \ni (t,x,u) \longrightarrow (f(t,x,u), h(t,x,u), g(t,x,u)) \in R^n \times R^m \times R^p$$

$a)$ $f(.,x,u)$ e' misurabile secondo Lebesgue per ogni x,u;

$b)$ $\forall r>0, \exists k(.)\in L^1(0,T), \forall (x,u),(x',u')\in B_r(0)\times U$:

$$\| f(t,x,u)-f(t,x',u') \| \leq k(t) \| (x,u)-(x',u') \| \ (q.d.);$$

$c)$ $\exists \gamma(.)\in L^1(0,T)$: $\sup\limits_{\substack{u\in U\\ x\in R^n}} \dfrac{\| f(t,x,u) \|}{(1+\| x \|)} \leq \gamma(t)\ (q.d.)$;

$d)$ Per ogni $(t,x)\in [0,T]\times R^n$ esistono $r>0, L>0$ tali che

$d-i)$ per ogni $(t',x')\in B_r(t,x)$ si ha

$$\{u\in U |\ h(t',x',u)\leq r, \| g(t',x',u) \| \leq r\} = \text{ compatto in } Z;$$

$d-ii)$ per ogni $u\in U$ e $(t',x'),(t'',x'')\in B_r(t,x)$ si ha

$$\| (h,g)(t',x',u)-(h,g)(t'',x'',u) \| \leq L \| (t',x')-(t''-x'') \|;$$

$d-iii)$ per ogni K limitato in U esiste $M\geq 0$ tale che

$$\| h(t',x',u')-h(t',x',u) \| \leq M \| u'-u \|$$

per ogni $u,u'\in K$ e per ogni $(t',x')\in B_r(t,x)$.

Poniamo

$\mathcal{T}_{f,U}(0,T;x_0)=\{x(.):[0,T]\longrightarrow R^n |\ \exists u(.)$ tale che valgano le condiz.(1) $\}$

e per la multifunzione

$$[0,T]\times R^n \ni (t,x)\longrightarrow \Gamma(t,x)\subset R^n$$

poniamo

$\mathcal{T}_\Gamma(0,T;x_0)=\{x(.):[0,T]\longrightarrow R^n |\ x(.)$ ass.cont. $, \dot{x}(t)\in \Gamma(t,x(t))\ q.d., x(0)=x_0\}$

Poniamo anche

$$G(t,x)=\{u\in U |\ h(t,x,u)\leq 0, g(t,x,u)=0\}, \tag{2}$$

$$F(t,x)=\{f(t,x,u) |\ u\in G(t,x)\} = f(t,x,G(t,x)). \tag{3}$$

E' chiaro che $\mathcal{T}_{f,U}(0,T;x_0)\subset \mathcal{T}_F(0,T;x_0)$. Nelle nostre ipotesi a)-d), per ogni $x(.)\in \mathcal{T}_F(0,T;x_0)$ la multifunzione

$$[0,T]\ni t\longrightarrow \{u\in G(t,x(t)) |\ \dot{x}(t)=f(t,x(t),u)\}$$

ammette una selezione misurabile (cfr. [4], Theorem III.38) e quindi vale la seguente

Proposizione 1. *Sotto le ipotesi a)-d) si ha*

$$\mathcal{T}_{f,U}(0,T;x_0) = \mathcal{T}_F(0,T;x_0)$$

Ci proponiamo di provare, sotto ulteriori opportune ipotesi, che

$$\mathcal{T}_{f,U}(0,T;x_0) \text{ e' } denso \text{ in } \mathcal{T}_{coF}(0,T;x_0)$$

rispetto alla norma naturale dello spazio $C(0,T;R^n)$ delle funzioni continue su $[0,T]$ a valori in R^n.

Gli elementi $y(.) \in \mathcal{T}_{coF}(0,T;x_0)$ si dicono anche *soluzioni rilassate* del sistema (1).

Per dimostrare la nostra affermazione utilizzeremo il seguente

Teorema 1. *Supponiamo che la multifunzione*

$$[0,T] \times R^n \ni (t,x) \longrightarrow \Gamma(t,x) \subset R^n$$

verifichi le seguenti condizioni (q.d.)
i) esiste $0 \leq \gamma(.) \in L^1(0,T)$ *tale che*

$$\emptyset \neq \Gamma(t,x) = \textit{chiuso} \subset \gamma(t)(1+ \| x \|)B;$$

ii) $\Gamma(.,x)$ *e' misurabile (cfr([1],[4]) per ogni* $x \in R^n$;
iii) per ogni limitato $A \subset R^n$ *esiste* $k_A(.) \in L^1(0,T)$ *tale che*

$$\Gamma(t,x) \subset \Gamma(t,x') + k_A(t) \| x - x' \| B \textit{ per ogni } x,x' \in A.$$

Allora si ha

$$\overline{\mathcal{T}_\Gamma(0,T;x_0)} = \mathcal{T}_{co\Gamma}(0,T;x_0) \neq \emptyset \textit{ compatto in } C(0,T;R^n).$$

Questo e' un risultato classico per la cui dimostrazione rimandiamo, per esempio, a [5], Theorem 3.1.6 e relativo Corollary, Theorem 3.1.7.

Dalle condizioni a)-d) segue (cfr.[10]) che la multifunzione G definita in (2) assume valori compatti, e' *superiormente semicontinua* (u.s.c.), ossia per ogni $(\bar{t},\bar{x})$ si ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (t,x) : \| (t,x) - (\bar{t},\bar{x}) \| \leq \delta \Longrightarrow G(t,x) \subset G(\bar{t},\bar{x}) + \epsilon B,$$

ha dominio $D(G) = \{(t,x) | \; G(t,x) \neq \emptyset\}$ chiuso, e che la multifunzione F definita in (3) verifica la condizione ii) del Teorema 1 e anche la condizione i), esclusa eventualmente la condizione

$$F(t,x) \neq \emptyset \text{ per ogni } (t,x) \in [0,T] \times R^n.$$

Per potere applicare alla nostra F il Teorema 1 ci servono altre ipotesi sui dati del sistema (1) e i due seguenti teoremi di inversione locale.

Sia (X,d) uno spazio metrico, $(Y, \| \, . \, \|)$ uno spazio di Banach e

$$\phi : X \longrightarrow Y \text{ continua .}$$

Poniamo, seguendo [10], per $\bar{x} \in X$

$$\phi^1(\bar{x}) = \{\lim_{i \leftarrow \infty} \frac{\phi(x_i) - \phi(\bar{x})}{h_i} | \ d(x_i, \bar{x}) \leq h_i \longrightarrow 0\}.$$

$\phi^1(\bar{x})$ e' chiuso in Y.

Se anche X e' uno spazio di Banach e ϕ e' differenziabile secondo Frechet in $\bar{x}$, si ha

$$\overline{\phi'(\bar{x})(B)} = \phi^1(\bar{x}). \tag{4}$$

Se inoltre $X \supset K$ chiuso e $\bar{x} \in K$, si ha

$$\phi'(\bar{x})(B \cap T_K(\bar{x})) \subset (\phi_{|K})^1(\bar{x}), \tag{5}$$

ove

$$T_K(\bar{x})) = \{\lim_{i \to \infty} \frac{x_i - \bar{x}}{h_i} | \ K \ni x_i \to \bar{x}, 0 < h_i \to 0\}$$

e' il cono tangente a K in $\bar{x}$.

Teorema 2. *Sia (X,d) uno spazio metrico completo, $(Y, \| \ . \ \|)$ uno spazio di Banach con la norma differenziabile secondo Gateaux fuori dall'origine,*

$$\phi : X \longrightarrow Y \ \textit{continua} \ .$$

Siano $\bar{x} \in X, r > 0, \delta > 0$ tali che

$$\delta B \subset \bigcap_{d(x,\bar{x}) \leq 2r} \bar{co}\phi^1(x).$$

Allora si ha per ogni $x \in X$ e $y \in Y$

$$d(x, \bar{x}) \leq r, \| \ y - \phi(x) \ \| < \delta r \Longrightarrow d(x, \phi^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\delta} \ \| \ \phi(x) - y \ \|$$

e in particolare riesce $\phi^{-1}(y) \neq \emptyset$.

In [10] e' provato questo teorema applicando il principio variazionale di Ekeland alla funzione

$$B_r(x) \ni x' \longrightarrow \| \ y - \phi(x') \ \|$$

e al punto $x \in B_r(x_0)$.

Teorema 3. *Siano X e Y spazi di Hilbert di dimensione finita, sia (M,d) uno spazio metrico e sia*

$$X \times M \ni (x, m) \longrightarrow \phi(x, m) \in Y$$

una funzione continua e differenziabile rispetto a x con differenziale $D_x\phi$ continuo su tutto $X \times M$. Siano $m_0 \in M, x_0 \in S \subset X, S$ chiuso tali che

$$\phi(x_0, m_0) = 0$$

e

$$(C-Q) \qquad y \in Y, -D_x\phi(x_0,m_0)^*y \in N_S^L(x_0) \Longrightarrow y=0.$$

Allora esistono $r>0, \delta>0$ *tali che per ogni* $x \in B_r(x_0) \cap S, m \in B_r(m_0), y \in Y$ *si ha*

$$\| \phi(x,m) - y \| < \delta r \Longrightarrow d(x, \Phi_S(y,m)) \leq \frac{1}{\delta} \| \phi(x,m) - y \|,$$

dove

$$\Phi_S(y,m) = \{s \in S | \ \phi(s,m) = y\}.$$

Il cono normale $N_S^L(x)$ e' definito dalle seguenti formule, per $x \in S$,

$$N_S^P(x) = \{v \in X | \limsup_{S \ni x' \leftarrow x} \frac{< v, x'-x >}{\| x'-x \|^2} < \infty\},$$

$$N_S^L(x) = \{\lim_{i \leftarrow \infty} v_i | \ v_i \in N_S^L(x_i), S \ni x_i \longrightarrow x\}.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [6], Theorem 3.4 e Theorem 3.1.

I teoremi 4 e 5 che seguono permettono di applicare il Teorema 1 al nostro sistema (1).

Poniamo

$$p = (t,x) \in [0,T] \times R^n = P,$$

$$I(p,u) = \{i | \ 1 \leq i \leq m, h_i(p,u) = 0\},$$

$$I'(p,u) = \{i | \ 1 \leq i \leq m, h_i(p,u) < 0\},$$

$$h_{I(p,u)} = [h_i]_{i \in I(p,u)}$$

e consideriamo la seguente condizione di tipo Mangasarian-Fromovitz

$$(M-F) \qquad \begin{cases} \text{esistono } D_u h, D_u g \text{ continue su } P \times Z; \\ \forall u \in G(p) : D_u g(p,u) \text{ e' } \textit{surjettiva}, \\ \text{se } I(p,u) \neq \emptyset, \text{ per ogni } u \in G(p) \text{ esiste } v \in Z \text{ tale che} \\ \quad D_z h_{I(p,u)}(p,z)|_{z=u} v < 0, \ D_u g(p,u)v = 0 \end{cases}$$

Teorema 4. *Supponiamo verificate le condizioni a)-d) con U=Z e la condizione (M-F). Supponiamo inoltre* $G(p_1) \neq \emptyset$ *per qualche* $p_1 \in P$.

Allora G e' localmente lipschitziana e riesce $G(p) \neq \emptyset$ *per ogni* $p \in P$.

Questo e' uno dei risultati principali di [10].

Abbiamo gia' osservato che G e' u.s.c. a valori compatti e con grafico chiuso e che Dom(G)= $\{p \in P | \ G(p) \neq \emptyset\}$ e' chiuso. Dalla locale lipschitzianita' di G in P seguira' che Dom(G) e' aperto in P e pertanto si avra' Dom(G)=P.

Per provare che G e' localmente lipschitziana in $\bar{p}$ ragioniamo per assurdo. Dunque affermiamo che esistono le successioni $p'_n, p"_n \in P$ tali che per $n \geq 1$

$$\| p'_n - \bar{p} \| \leq \frac{1}{n}, \| p"_n - \bar{p} \| \leq \frac{1}{n},$$

$$G(p'_n) \not\subset G(p"_n) + n \parallel p'_n - p"_n \parallel B$$

e quindi esiste u'_n tale che per ogni n

$$u'_n \in G(p'_n), \quad d(u'_n, G(p"_n))) > n \parallel p'_n - p"_n \parallel .$$

Per ogni $\sigma > 0$ si ha, poiche' G e' u.s.c. in $\bar{p}$,

$$u'_n \in G(p'_n) \subset G(\bar{p}) + \sigma B \text{ per } n \geq n_\sigma$$

e $G(\bar{p})$ e' compatto. Ne segue che $\{u'_n | n \geq 1\}$ e' relativamente compatto e quindi possiamo supporre (eventualmente per una sottosuccessione)

$$u'_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \bar{u} \in G(\bar{p}).$$

Supponiamo $I = I(\bar{p}, \bar{u}) \neq \emptyset$. Dalla condizione (M-F) in $(\bar{p}, \bar{u})$ segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$D_{u,\alpha}\psi(\bar{p}, \bar{u}, \alpha)(B^+) \supset 2\delta B,$$

ove

$$\psi(p, u, \alpha) = (h_I(p, u) + \alpha, g(p, u)), \quad \alpha \in R^I,$$

$$B^+ = \{(u, \alpha) \in Z \times R^I | \parallel u \parallel^2 + \parallel \alpha \parallel^2 \leq 1, \alpha \geq 0\}$$

e B rappresenta la sfera unita' di $R^I \times R^p$:

Per la continuita' di $D_{u,\alpha}\psi$, esiste $r > 0$ tale che

$$\parallel u - \bar{u} \parallel \leq 2r, \parallel p - \bar{p} \parallel \leq 2r, \alpha \in R^I \implies$$

$$D_{u,\alpha}\psi(p, u, \alpha)(B^+) \supset \delta B.$$

L'insieme $X = Z \times [0, +\infty[^I$ e' convesso e chiuso in $Z \times R^I$ e si ha per ogni $(u, \alpha) \in X$ (cfr. [2], [5])

$$T_X(u, \alpha) = Z \times \prod_{\substack{i \in I \\ \alpha_i = 0}} [0, +\infty[\times \prod_{\substack{i \in I \\ \alpha_i > 0}} R \supset Z \times [0, +\infty[^I,$$

$$B \cap T_X(u, \alpha) \supset B^+,$$

e quindi, per la (5),

$$(\psi(p, \cdot, \cdot)|_X)^1(u, \alpha) \supset D_{u,\alpha}\psi(p, u, \alpha)(B \cap T_X(u, \alpha)) \supset D_{u,\alpha}\psi(p, u, \alpha)(B^+) \supset \delta B$$

per ogni $p, u, \alpha \geq 0$ tali che $\parallel u - \bar{u} \parallel \leq 2r$, $\parallel p - \bar{p} \parallel \leq 2r$.
Supponiamo che valga anche la condizione d-ii) in $\bar{p}$ con il presente r.

Ora possiamo applicare il Teorema 2 alla funzione

$$X \ni (u, \alpha) \longrightarrow \phi_n(u, \alpha) = \psi(p"_n, u, \alpha))$$

e al punto $\bar{x} = (\bar{u}, 0)$.
Si ha per $n \geq \bar{n}$

$$\parallel (u'_n, 0) - (\bar{u}, 0) \parallel \leq r,$$

$$\| \phi_n(u'_n, 0) - (h_I(p'_n, u'_n), 0) \|^2 =$$

$$\| h_I(p''_n, u'_n) - h_I(p'_n, u'_n) \|^2 + \| g(p''_n, u'_n) - g(p'_n, u'_n) \|^2 \leq$$

$$L^2 \| p''_n - p'_n \|^2 < \delta^2 r^2,$$

e dalla compattezza di $G(\bar{p})$ segue che esistono $\tilde{u}_n \in U$, $0 \leq \tilde{\alpha}_n \in R^I$ tali che

$$\| (u'_n, 0) - (\tilde{u}_n, \tilde{\alpha}_n) \| = d((u'_n, 0), \phi_n^{-1}(h_I(p'_n, u'_n), 0)) \leq$$

$$\frac{L}{\delta} \| p''_n - p'_n \|.$$

$$\phi(\tilde{u}_n, \tilde{\alpha}_n) = (h_I(p'_n, u'_n), 0).$$

Si ha anche, per $n \geq \bar{n}$,

$$h_I(p''_n, \tilde{u}_n) = -\tilde{\alpha}_n + h_I(p'_n, u'_n) \leq 0$$

$$g(p''_n, \tilde{u}_n) = 0,$$

$$\| u'_n - \tilde{u}_n \| \leq L \| p''_n - p'_n \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\tilde{u}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \bar{u},$$

$$h_i(p''_n, \tilde{u}_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} h_i(\bar{p}, \bar{u}) < 0 \text{ per } i \in I'$$

e quindi si puo' supporre che riesca anche

$$h_i(p''_n, \tilde{u}_n) < 0 \text{ per } i \in I',\ n \geq \bar{n}.$$

Da tutto questo segue

$$\tilde{u}_n \in G(p''_n),$$

$$n \| p'_n - p''_n \| < d(u'_n, G(p''_n)) \leq \| u'_n - \tilde{u}_n \| \leq \frac{L}{\delta} \| p''_n - p'_n \|$$

e di qui l'assurdo

$$\| p''_n - p'_n \| > 0, \quad n < \frac{L}{\delta} \text{ per } n \geq \bar{n}.$$

In modo simile si tratta il caso di $I(\bar{p}, \bar{u}) = \emptyset$ e si conclude cosi' la dimostrazione.

Teorema 5. *Supponiamo verificate le condizioni a)-d) con $Z = R^\nu$ e la seguente condizione*

$$(M' - F'). \quad \begin{cases} \text{esistono } D_u h, D_u g \text{ continue su } P \times R^\nu, \\ \forall u \in G(p) : D_u g(p, u)(C_U(u)) = R^p, \\ \text{se } I(p, u) \neq \emptyset, \text{ per ogni } u \in G(p) \text{ esiste } v \in C_U(u) \text{ tale che} \\ \quad D_z h_{I(p,u)}(p, z)|_{z=u} v < 0, \ D_u g(p, u) v = 0 \end{cases}$$

ove $C_U(u)$ rappresenta il cono tangente a U in u secondo Clarke (cfr [5]). Supponiamo inoltre $G(p_1) \neq \emptyset$ per qualche $p_1 \in P$.

Allora G e' localmente lipschitziana e riesce $G(p) \neq \emptyset$ per ogni $p \in P$.

La dimostrazione contenuta in [10] si fonda sul Teorema 2. Qui indichiamo una dimostrazione che utilizza il Teorema 3.

Procediamo come nella dimostrazione del Teorema 4, con gli stessi simboli, fino alla determinazione delle successioni

$$N \ni n \longrightarrow p'_n, p"_n, u'_n$$

tali che

$$\| p'_n - \bar{p} \| \leq \frac{1}{n}, \| p"_n - \bar{p} \| \leq \frac{1}{n}, u'_n \in G(p'_n)$$

$$d(u'_n, G(p"_n))) > n \| p'_n - p"_n \|, u'_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \bar{u} \in G(\bar{p}).$$

Supponiamo $I = I(\bar{p}, \bar{u}) \neq \emptyset$ e applichiamo la condizione (M'-F') in $(\bar{p}, \bar{u})$. Si ha (cfr [2], [5])

$$C_S(\bar{u}, \bar{\alpha} = 0) = C_U(\bar{u}) \times [0, +\infty[^I,$$

$$C_U(\bar{u}) = \{z \in R^\nu | \, \forall \xi \in N_U^L(\bar{u}) :< z, \xi > \leq 0\}.$$

Verifichiamo che vale la condizione (C-Q) del Teorema 3 con

$$M = P \ni \bar{p}, X = R^\nu \times R^I \supset U \times [0, +\infty[^I = S \ni (\bar{u}, 0),$$

e

$$\phi(p, (u, \alpha)) = \psi(p, u, \alpha) = (h_I(p, u)) + \alpha, g(p, u)) \in R^I \times R^p = Y.$$

Siano

$$y = (y', y"), \; y' = [y'_i]_{i \in I}, \; y" = [y"_i]_{1 \leq i \leq p}, \; \xi \in N_S^L(\bar{u}, 0)$$

tali che

$$0 = \xi + D_{u,\alpha}\phi(\bar{p}, (\bar{u}, 0))^* y.$$

Per ogni $\zeta = (z, \theta) \in C_U(\bar{u}) \times [0, +\infty[^I = C_S(\bar{u}, 0)$ si ha

$$0 =< \xi, (z, \theta) > + \sum_{i \in I} y'_i [D_u h_i(\bar{p}, \bar{u}) z + \theta_i] + \sum_{i=I}^{p} y"_i D_u g_i(\bar{p}, \bar{u}) z,$$

$$< \xi, (z, \theta) > \leq 0.$$

Con la scelta $z = 0$ e

$$\theta = (0, .., \underset{i}{1}, ...0)$$

si ottiene $y'_i \geq 0$ per $i \in I$. Segue da (M'-F') che esiste $\hat{z} \in C_U(\bar{u})$ tale che

$$D_u h_i(\bar{p}, \bar{u}) \hat{z} < 0 \text{ per } i \in I, \quad D_u g_i(\bar{p}, \bar{u}) = 0 \text{ per } 1 \leq i \leq p$$

e con la scelta $\zeta = (\hat{z}, 0)$ si ottiene si ottiene $y'_i = 0$ per $i \in I$. Sempre da (M'-F') segue che esiste $z_y \in C_U(\bar{u})$ tale che

$$D_u g_i(\bar{p}, \bar{u}) z_y = -y"_i \quad \text{per } 1 \leq i \leq p$$

e con la scelta $\zeta = (z_y, 0)$ si ottiene $y"_i = 0$ per $1 \leq i \leq p$

Ora possiamo applicare il Teorema 3 e ottenere due costanti $r > 0, \delta > 0$ tali che da

$$u \in U,\ \alpha \in [0, +\infty[^I,\ p \in P,\ y = (y', y") \in Y,$$

$$\| (u, \alpha) - (\bar{u}, 0) \| \leq r,\ \| p - \bar{p} \| \leq r,$$

$$\| \psi(p, u, \alpha) - y \| < \delta r$$

segue

$$d((u, \alpha), \Phi_S(p, y)) \leq \frac{1}{\delta} \| \psi(p, u, \alpha) - y \| .$$

Se poniamo $u = u'_n$, $\alpha = 0$, $p = p"_n$, $y = \psi(p'_n, u'_n, 0)$ possiamo procedere come nella dimostrazione del Teorema 4 e arrivare di nuovo a un assurdo.

Dai teoremi 4 e 5 e dalla Proposizione 1 segue il

Teorema 6. *Supponiamo verificate le ipotesi del Teorema 4 oppure le ipotesi del Teorema 5. Allora si ha (chiusura in $C(0, T; R^n)$)*

$$\overline{\mathcal{T}_{f,U}(0, T; x_0)} = \mathcal{T}_{coF}(0, T; x_0) \neq \emptyset \ \ \textit{compatto in}\ C(0, T; R^n).$$

Consideriamo ora lo spazio

$$C(U) = \{\phi : U \longrightarrow R |\ \phi \ \textit{continua}\},$$

con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di U, il suo duale $C(U)^*$ con la topologia della convergenza debole indotta da C(U), e il sottospazio $\mathcal{M}(U)$ di $C(U)^*$ costituito dalle misure di probabilita' su U.

Poniamo, seguendo [3] e [10],

$$\hat{U}(0, T) = L^\infty(0, T; \mathcal{M}(U)),$$

$$\hat{U}_{h,g}(0, T) = \{\mu \in \hat{U}(0, T) |\ \text{per quasi ogni t si ha}$$

$$\mu(t, \{u \in U |\ h_i(t, x(t), u > 0\} = 0) \ \text{per}\ 1 \leq i \leq m,$$

$$\mu(t, \{u \in U |\ \| g(t, x(t), u \| > 0\}) = 0\},$$

essendo x(.) continua tale che

$$x(t) = x_0 + \int_0^t ds \int_U f(s, x(s), u) \mu(s, du) \ \text{per}\ 0 \leq t \leq T.$$

Una tale funzione x(.) e' denominata in [3], in presenza del solo vincolo h, e successivamente anche in [10] *curva generalizzata* del sistema (1) corrispondente al *controllo rilassato* $\mu \in \hat{U}_{h,g}(0, T)$.

Si ha il seguente teorema

Teorema 7. *Sotto le ipotesi del Teorema 6 si ha*

$$\mathcal{T}_{coF}(0,T;x_0) = \{x(.) \in C(0,T;R^n) |\ x(.) = \textit{ curva generalizzata di (1) }\}$$

Questo teorema, contenuto in [10], generalizza un precedente risultato di [3], ottenuto con tecniche assai diverse.

Sia x(.) la curva generalizzata associata a $\mu \in \hat{U}_{h,g}(0,T)$. Allora si ha

$$|f(t,x(t),u)| \leq \gamma(t)(1+\max_{0\leq t\leq T}|x(t)|) = \gamma(t)M_0$$

e quindi x(.) e' assolutamente continua. La funzione

$$R^n \times [0,T] \ni (p,t) \longrightarrow \sigma(p,t) = \sup_{u\in G(t,x(t))} < p, f(s,x(s),u) > \leq \gamma(t)M_0$$

e' continua rispetto a p e sommabile rispetto a t. Si ha poi per $p \in R^n$, $0 \leq t \leq t' \leq T$

$$< p, x(t') - x(t) > = \int_t^{t'} < p, \dot{x}(s) > ds =$$

$$\int_t^{t'} ds \int_{G(s,x(s))} < p, f(s.x(s),u) > \mu(s,du) \leq \int_t^{t'} \sigma(p,s)\, ds$$

e quindi

$$0 \leq \int_t^{t'} [\sigma(p,s) - < p, \dot{x}(s) >]\, ds$$

ed esiste $E_p \subset [0,T]$ di misura nulla (secondo Lebesgue) tale che

$$\sigma(p,t) - < p, \dot{x}(t) > \geq 0 \text{ per } t \notin E_p.$$

Se poniamo

$$E = \bigcup_{\substack{p\in R^n \\ p \text{ razionale}}} E_p,$$

otteniamo

$$< p, \dot{x}(t) > \leq \sigma(p,t) \text{ per } t \notin E, R^n \ni p \text{ razionale },$$

e questa disuguaglianza si estende a ogni $p \in R^n$ per continuita'. Ne segue che

$$\dot{x}(t) \in coF(t,x(t)) \text{ q.d. su } [0,T]$$

e quindi che

$$x(.) \in \mathcal{T}_{coF}(0,T;x_0).$$

Sia ora $x(.) \in \mathcal{T}_{coF}(0,T;x_0)$. Allora si ha, per quasi ogni $t \in [0,T]$,

$$\dot{x}(t) \in coF(t,x(t)),$$

$$\Lambda(t) = \{(\lambda_0,...,\lambda_n,u_0,...,u_n) \in R^{n+1} \times U^{n+1} | \lambda_i \geq 0, \sum_0^n \lambda_i = 1,$$

$$u_i \in G(t, x(t)), 0 = \dot{x}(t) - \sum_0^n \lambda_i f(t, x(t), u_i)\} \not\emptyset \text{ chiuso}$$

e la multifunzione $\Lambda(.)$ ammette una selezione misurabile (cfr. [4])

$$[0,T] \longrightarrow (\lambda_0(t), ..., \lambda_n(t), u_0(t), ..., u_n(t)) \in \Lambda(t).$$

Poniamo per $\phi \in C(U), 0 \le s \le T$

$$\int_U \phi(u)\mu(s, du) = \sum_0^n \lambda_i(s)\phi(u_i(s)).$$

Allora $\mu \in \hat{U}_{h,g}(0,T)$ e x(.) e' la corrispondente curva generalizzata.

Concludiamo indicando alcuni tipi di vincoli di stato che si possono aggiungere al sistema (1) e tali che il sistema cosi' ottenuto sia ancora trattabile con i metodi visti sopra.

Il vincolo

$$\phi(, t, x(t)) = 0 \text{ per } 0 \le t \le T$$

aggiunto al sistema (1), per ϕ almeno di classe C^1 e con $\phi(0, x_0) = 0$, e' equivalente al seguente

$$D_t\phi(t, x(t)) + D_x\phi(t, x(t))f(t, x(t), u(t)) = 0.$$

Il vincolo

$$x(t) \in \bar{\Omega} \text{ per } 0 \le t \le T$$

aggiunto al sistema (1), con Ω aperto in R^n, non e' trattabile cosi' semplicemente. Tuttavia consideriamo la seguente condizione su Ω e F, data da (3),

$$(6) \qquad \begin{cases} \forall x_0, \exists M_0 \ge 0, \forall x(.) \in \mathcal{T}_F(0,T;x_0), \exists \hat{x}(.) \in \mathcal{T}_F(0,T;x_0): \\ \hat{x}(t) \in \bar{\Omega} \text{ per } 0 \le t \le T, \\ \max\limits_{0\le t\le T} \| x(t) - \hat{x}(t) \| \le M_0 \max\limits_{0\le t\le T} d(x(t), \bar{\Omega}) \end{cases}$$

e poniamo

$$\mathcal{T}_F^{\bar{\Omega}}(0,T;x_0) = \{x(.) \in \mathcal{T}_F(0,T;x_0) | \ x(t) \in \bar{\Omega} \text{ per } 0 \le t \le T\}.$$

In [10] e' provato il seguente

Teorema 8. *Se F(.,.) e' localmente lipschitziana e se vale la condizione (6), allora*

$$\overline{\mathcal{T}_F^{\bar{\Omega}}(0,T;x_0)} = \mathcal{T}_{coF}^{\bar{\Omega}}(0,T;x_0) \not\emptyset \textit{ compatto in } C(0,T;R^n).$$

Osserviamo che la lipschitzianita' di F(.,.), sotto le ipotesi del Teorema 5 o del Teorema 6, segue dalla locale lipschitzianita' di f(.,.,.).

In [8], [10], [11], [12] sono trattati alcuni tipi di aperti Ω che, insieme con F, verificano la condizione (6).

BIBLIOGRAFIA

1. J. P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
2. J. P. Aubin, I. Ekeland. *Nonlinear Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1984.
3. E. N. Barron, J. Jensen, *Relaxation of constrained control systems*, SIAM J. Contr.Optim. **34** (1996), 2077–91.
4. C. Castaing, M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Mathem. 580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
5. F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1983.
6. F. H. Clarke, *Solving equations by the decrease principle*, Centre de Recherches Mathematiques. CRM Proceedings and Lecture Notes **11** (1997), 29–39.
7. F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.S. Stern, P.R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
8. F. Forcellini, F. Rampazzo, *On nonconvex differential inclusions whose state is constrained in the closure of an open set. Applications to dynamic programming*, Differ. Integral Equat. **12,4** (1999), 471–97.
9. H. Frankowska, *Some inverse mapping theorems*, Ann. Inst. H. Poincare'. Annal. Non Lineaire **7** (1990), 183–234.
10. H. Frankowska, F. Rampazzo, *Relaxation of control systems under state constraints*, SIAM J. Contr.Optim. **37** (1999), 1291–1309.
11. M. Motta, F. Rampazzo, *A sufficient condition for the continuity of the value function of control problems with state constraints*, NoDEA, to appear.
12. F. Rampazzo, R. B. Vinter, *A theorem on existence of neighbouring trajectories satisfying a state constraint, with applications to optimal control with state constraints*, IMA J. Mathem. Control & Information **16** (1999), 335–351.